Erinnerung: Für jede reelle $n \times n$-Matrix A und jede Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ gilt

$$\mathrm{vol}_n(L_A(X)) = |\det(A)| \cdot \mathrm{vol}_n(X),$$

sofern beide Seiten wohldefiniert sind.

Lemma: Für jede orthogonale Matrix Q gilt $\det(Q) = \cancel{1}\ \pm 1$.

Bew.: $Q^T Q = I_n \Rightarrow 1 = \det(I_n) = \det(QQ^T) = \det(Q)\det(Q^T) = \det(Q)^2$ qed.

„Proposition-Definition“: Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum der Dimension n, und sei $f : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} V$ eine Isometrie (für das Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$). Dann ist für jede Teilmenge $X \subset V$ das *Volumen*

$$\mathrm{vol}_n(X) := \mathrm{vol}_n(f^{-1}(X))$$

unabhängig von f, sofern es existiert.

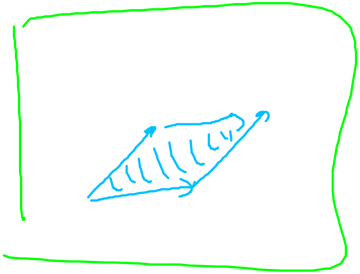
Bew.: $g : \mathbb{R}^n \to V$ weitere Isometrie $\Rightarrow$ $g^{-1} \circ f = L_Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Isometrie für eine orthogonale Matrix Q.

$\Rightarrow g^{-1} = L_Q \circ f^{-1} \Rightarrow g^{-1}(X) = L_Q(f^{-1}(X)) \Rightarrow \mathrm{vol}_n(g^{-1}(X)) = |\det(Q)| \cdot \mathrm{vol}_n(f^{-1}(X))$

$= \mathrm{vol}_n(f^{-1}(X))$. qed.

Betrachte nun Vektoren $v_1, \ldots, v_m$ in einem beliebigen euklidischen Vektorraum $(V, \langle\ ,\ \rangle)$.

dim 3



Definition: Die *Gram-sche Determinante* von $v_1, \ldots, v_m$ ist

$$\boxed{G \;:=\; \det(\langle v_i, v_j\rangle)_{i,j=1,\ldots,m} \;\in\; \mathbb{R}.}$$

„Satz“: (a) Es gilt stets $G \geqslant 0$.

(b) Es ist $G > 0$ genau dann, wenn $v_1, \ldots, v_m$ linear unabhängig sind.

(c) Es gilt

$$\boxed{\mathrm{vol}_m\Big(\big\{\textstyle\sum_{i=1}^m t_i v_i \;\big|\; \forall\, i\colon 0 \leqslant t_i \leqslant 1\big\}\Big) \;=\; \sqrt{G}.}$$

Bew.: [Ersetze V durch Erzeugnis von $v_1, \ldots, v_m$. Wähle Isometrie $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} V$. $\Rightarrow n \leq m$.] OBdA $V = \mathbb{R}^n$. $\Rightarrow \underbrace{v_1, \ldots, v_m}_{\text{erzeugen } \mathbb{R}^n}$

$\leadsto$ $n \times m$-Matrix $A := (v_1, \ldots, v_m)$

$\Rightarrow A^T A = \begin{pmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_m^T \end{pmatrix} (v_1, \ldots, v_m) = (v_i^T \cdot v_j)_{\substack{i=1\ldots m\\ j=1\ldots m}} = (\langle v_i, v_j\rangle)_{i,j} =: M$

$\Rightarrow \det(A^T \cdot A) = G$
$\qquad \det(M)$

Fall $m > n$: $\Rightarrow \mathrm{Rang}(A) \leq n < m$
$\Rightarrow \mathrm{Rang}(M) < m \Rightarrow \det(M) = 0$.
und $v_1, \ldots, v_m$ lin. abhängig.

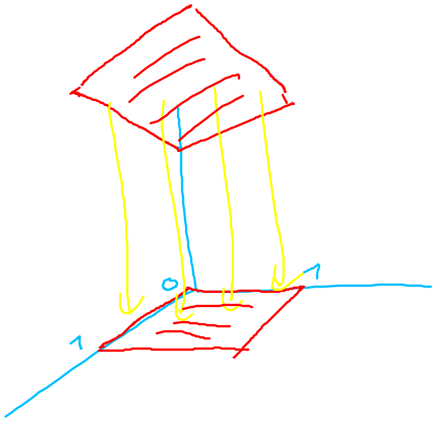
Fall $m = n$: $G = \det(A)^2 \geq 0$.
und $v_1, \ldots, v_n$ lin. unabhängig.
$\Rightarrow A$ invertierbar $\Rightarrow \det(A) \neq 0 \Rightarrow G > 0$.
$\mathrm{vol}_m(\ldots) = \mathrm{vol}_n(L_A([0,1]^n)) = |\det(A)| \cdot \mathrm{vol}_n([0,1]^n) = \sqrt{G}$ qed.

Beispiel: Für $m = 1$ ist das m-dimensionale Volumen die *Länge*

$$\mathrm{vol}_1\big(\{tv_1 \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\}\big) \;=\; \sqrt{\langle v_1, v_1\rangle} \;=\; |v_1|.$$

Für $m = 2$ ist es der *Flächeninhalt*, zum Beispiel gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $v_1 := (1, 0, a)^T$ und $v_2 := (0, 1, b)^T$

$$\mathrm{vol}_2\left(\left\{\begin{pmatrix} s \\ t \\ as + bt \end{pmatrix} \;\middle|\; s, t \in [0, 1]\right\}\right) \;=\; \sqrt{1 + a^2 + b^2}.$$



$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1+a^2 & ab \\ ab & 1+b^2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A^T A) = (1+a^2)(1+b^2) - a^2 b^2 = 1 + a^2 + b^2$$

$$\sqrt{G} = \sqrt{1 + a^2 + b^2}.$$

10.12 Skalarprodukte und Dualraum

Für jedes $v \in V$ sei $\delta(v)\colon V \to \mathbb{R},\ w \mapsto \langle v, w\rangle$.

(b) $n := \dim(V) < \infty$
$\Rightarrow \dim(V^\vee) = n$.
δ injektiv $\Rightarrow$ Isom.

Ist $\dim(V) = \infty$
$\Rightarrow \dim(V^\vee) > \dim(V)$
$\Rightarrow \delta$ kein Isom.

Proposition: (a) Die folgende Abbildung ist ein injektiver Homomorphismus:

$V^\vee \times V \to \mathbb{R}$
$(\ell, v) \mapsto \ell(v)$

$$\delta\colon V \longrightarrow V^\vee := \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R}), \quad v \mapsto \delta(v) := \boxed{\langle v, \ \rangle}$$

(b) Diese ist ein Isomorphismus genau dann, wenn $\dim V < \infty$ ist.

Bew (a) Bilinearität $\Rightarrow \delta$ wohldef. und $\delta(v+v')(w) = \langle v+v', w\rangle = \langle v, w\rangle + \langle v', w\rangle$
$= \delta(v)(w) + \delta(v')(w) = (\delta(v) + \delta(v'))(w)$
$\Rightarrow \delta(v+v') = \delta(v) + \delta(v')$
Analog $\delta(cv) = c \cdot \delta(v)$ $\Rightarrow \delta$ linear.

Ist $\delta(v) = 0$, dann ist $\langle v, v\rangle = \delta(v)(v) = 0$
$\Rightarrow \|v\| = 0 \Rightarrow v = 0$. $\Rightarrow \delta$ injektiv.

qed.

Vorsicht: Einen endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraum kann man deshalb leicht mit seinem Dualraum verwechseln. Man soll diese aber nur im Notfall identifizieren. Wenn man sie auseinander hält, kann man Fehler vermeiden, zum Beispiel beim Verhalten unter linearen Abbildungen. Eine lineare Abbildung $f\colon V \to V$ entspricht unter dem obigen Isomorphismus im allgemeinen nicht ihrer dualen Abbildung $f^\vee\colon V^\vee \to V^\vee$, denn

$\ell \mapsto \ell \circ f$.

$$\begin{array}{rrcl}
 & f & = & \delta^{-1} \circ f^\vee \circ \delta \\
\Leftrightarrow & \delta \circ f & = & f^\vee \circ \delta \\
\Leftrightarrow \quad \forall v \in V: & \delta(f(v)) & = & f^\vee(\delta(v)) \overset{\text{def}}{=} \delta(v) \circ f \\
\Leftrightarrow \quad \forall v, w \in V: & \langle f(v), w\rangle & \overset{\text{def}}{=} & \delta(f(v))(w) = \delta(v)(f(w)) \overset{\text{def}}{=} \langle v, f(w)\rangle,
\end{array}$$

und die letzte Eigenschaft ist nicht immer erfüllt.

Bemerkung: Sei V ein K-Vektorraum für einen beliebigen Körper K, und sei U ein Unterraum. Dann ist

$$\boxed{\{\ell \in V^\vee \mid \forall u \in U \colon \ell(u) = 0\}}$$

ein Unterraum von $V^\vee$, welcher auch oft das *orthogonale Komplement von U* genannt wird. Die Rechtfertigung dafür besteht darin, dass dieser für jeden endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraum gleich $\delta(U^\perp)$ ist mit dem obigen Isomorphismus δ.

10.13 Adjungierte Abbildungen

Seien V und W euklidische Vektorräume und $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung.

Proposition: Es gibt höchstens eine lineare Abbildung $f^*\colon W \to V$ mit der Eigenschaft

$$\boxed{\forall v \in V\ \forall w \in W\colon\ \langle f(v), w\rangle = \langle v, f^*(w)\rangle.}$$

Bew.: Sei $f^\#$ eine weitere. $\Rightarrow \forall v, w: \langle v, f^\#(w)\rangle = \langle f(v), w\rangle = \langle v, f^*(w)\rangle$

$\Rightarrow \langle v, (f^\# - f^*)(w)\rangle = \langle v, f^\#(w)\rangle - \langle v, f^*(w)\rangle = 0$

Setze $v := (f^\# - f^*)(w) \Rightarrow \forall w: \|(f^\# - f^*)(w)\|^2 = 0 \Rightarrow (f^\# - f^*)(w) = 0. \Rightarrow f^\# - f^* = 0.$

qed.

Definition: Diese heisst die *Adjungierte (Abbildung) von f*, wenn sie existiert.

Proposition: Ist f^* die Adjungierte von f, so ist auch f die Adjungierte von f^*, das heisst, es gilt $(f^*)^* = f$. Man nennt f und f^* daher auch *zueinander adjungiert.*

Bew.: $\forall v \in V\ \forall w \in W$:

$$\langle f^*(w), v\rangle \underset{\text{Symmetrie}}{=} \langle v, f^*(w)\rangle = \langle f(v), w\rangle \underset{\text{Symmetrie}}{=} \langle w, f(v)\rangle.$$

qed.

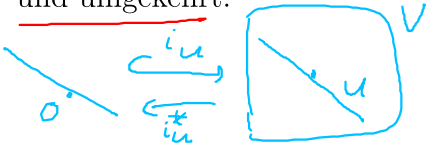
Beispiel: Die Adjungierte der Nullabbildung $V \to W$ ist die Nullabbildung $W \to V$.

Beweis: $\langle 0(v), w\rangle = \langle 0, w\rangle = 0 = \langle v, 0\rangle = \langle v, 0(w)\rangle$ qed.

Beispiel: Die Adjungierte der identischen Abbildung $\mathrm{id}_V \colon V \to V$ ist die identische Abbildung.

Beweis: $\langle id(v), w\rangle = \langle v, w\rangle = \langle v, id(w)\rangle$ qed.

Beispiel: Sei $U \subset V$ ein Unterraum mit $V = U \oplus U^\perp$ und mit dem von V induzierten Skalarprodukt. Dann ist die zur Inklusion $i_U \colon U \hookrightarrow V$, $u \mapsto u$ adjungierte Abbildung die orthogonale Projektion $\pi_U \colon V \twoheadrightarrow U$, und umgekehrt.



Für alle $u \in U$, $v \in V$ schreibe $v = u' + v'$ mit $u' \in U$, $v' \in U^\perp$

$$\Rightarrow \langle i_U(u), v\rangle = \langle u, u'+v'\rangle = \langle u, u'\rangle + \underbrace{\langle u, v'\rangle}_{0} = \langle u, u'\rangle = \langle u, \pi_U(v)\rangle.$$

Vorsicht: Die Adjungierte existiert nicht immer, zum Beispiel nicht für die Inklusion $U \hookrightarrow V$ in dem letzten Beispiel von §10.8.

$U^\perp = 0$

Proposition: Ist $\dim V < \infty$, so existiert die adjungierte Abbildung f^*. Genauer gilt für jede geordnete Orthonormalbasis $(b_1, \ldots, b_n)$ von V

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle b_i, v \rangle \cdot b_i$$

$$\boxed{\forall w \in W: \ f^*(w) \ = \ \sum_{i=1}^{n} \langle f(b_i), w \rangle \cdot b_i.}$$

Bew.: Dies definiert eine lineare Abb. $W \to V$.

$$\left.\begin{array}{l}\forall v \in V\\ \forall w \in W\end{array}\right| : \ \langle v, \sum_{i=1}^{n} \langle f(b_i), w \rangle b_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle f(b_i), w \rangle \cdot \langle v, b_i \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} f(b_i) \cdot \langle v, b_i \rangle, w \rangle$$

$$\boxed{\langle v, f^*(w) \rangle} \qquad = \langle f\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i \cdot \langle v, b_i \rangle \Big), w \rangle = \langle f(v), w \rangle.$$

qed.

Proposition: Seien B eine geordnete Orthonormalbasis von V und B' eine geordnete Orthonormalbasis von W. Dann gilt

$$\boxed{{}_B[f^*]_{B'} \ = \ {}_{B'}[f]_B^T.}$$

$B = (v_1, \ldots, v_m)$
$B' = (w_1, \ldots, w_n)$ ONB

Bew.: Sei ${}_{B'}[f]_B = (a_{ij})_{i,j} \quad \Rightarrow \forall j: \ f(v_j) = \sum_i a_{ij} w_i$

$$\Rightarrow \forall j, k: \quad \langle f(v_j), w_k \rangle = \langle \sum_i a_{ij} w_i, w_k \rangle = \sum_i a_{ij} \langle w_i, w_k \rangle = a_{kj}$$

$$\Rightarrow \forall k: \ f^*(w_k) = \sum_{j=1}^{n} \langle f(v_j), w_k \rangle v_j = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} v_j \Rightarrow {}_B[f^*]_{B'} = (a_{kj})_{j,k}$$

qed.